MODUL HIMPUNAN

Himpunan adalah sekumpulan objek atau benda dengan ciri-ciri tertentu. Objek atau benda yang termasuk dalam himpunan ini disebut anggota/unsur/elemen himpunan. Suatu himpunan dapat ditentukan dengan menyajikan daftar anggotanya, atau dengan menyebutkan ketentuan khusus yang menetapkan apakah sesuatu objek / benda termasuk anggota himpunan atau bukan. Nama lain untuk anggota suatu himpunan adalah elemen unsur dan untuk menyatakan anggota suatu himpunan.

A. JENIS-JENIS HIMPUNAN

1. Himpunan Semesta{U}adalah himpunan semua objek yang sedang dibicarakan.
2. Himpunan kosong { } adalah himpunan yang tidak mempunyai anggota.
3. Himpunan terhingga adalah himpunan yang banyak anggotanya terbatas.
4. Himpunan tak terhingga adalah himpunan yang jumlah anggotanya tidak terbatas.
5. Bilangan kardinal {n(H)} adalah bilangan yang menyatakan banyak anggota himpunan.

B. HUBUNGAN ANTAR HIMPUNAN

1. Himpunan bagian/subset

   A himpunan bagian B (ditulis A`B), jika setiap anggota A merupakan anggota B.

   Contoh : A = {1,2,3} dan B = {1,2,3,4,5}, maka A `B = {1,2,3}
2. Himpunan Ekivalen

   Himpunan A dikatakan ekivalen dengan B (A (B) jika banyak anggota A sama dengan banyaknya anggota B.

   Contoh : A = {1,2,3,4,5} dan B = {3,4,5,2,1} Jadi dikatakan A (B
3. Himpunan sama

   Himpunan A = B jika anggota A sama dengan anggota B.

   Contoh : A = {3,4,5} dan B = {3,4,5} Jadi dikatakan A = B
4. Himpunan kuasa/superset

   Himpunan A superset B (A) B) jika setiap anggota B merupakan anggota A.

   Contoh : A = {1,2,3,4,5} dan B = {3,4,5} Jadi dikatakan A C B = {3,4,5}

5. Himpunan lepas

   Himpunan A dan B dikatakan saling lepas (A # B) jika himpunan A dan B tidak mempunyai anggota persekutuan.

   Contoh : A = {1,2,3} dan B = {4,5,6} , A # B
6. Himpunan berpotongan/joint

   Himpunan A dan B berpotongan jika A dan B mempunyai anggota persekutuan dan anggota yang bukan persekutuan.

   Contoh : A = {1,3,5,7} dan B = {3,5,7,9} Jadi dikatakan AnB = {3,5}

C. OPERASI HIMPUNAN

1. Gabungan/union

   Gabungan himpunan A dan B adalah himpunan yang terdiri dari anggota A ditambah B

   Contoh : A = {1,2,3,4} dan B = {3,4,5,6} maka A u B = {1,2,3,4,5,6}
2. Irisan/interseksi

   Irisan himpunan A dan B {A n B} adalah himpunan yang anggotanya merupakan anggota persekutuan A dan B.

   Contoh : A = {1,2,3,4} dan B = {3,4,5,6} maka A n B = {3,4}
3. Selisih

   Selisih himpunan A dan B adalah himpunan yang merupakan anggota A tetapi bukan anggota B.

   Contoh : A = {1,2,3,4,5} dan B = {1,2,3}, maka A - B = {4,5}
4. Komplemen

   Himpunan komplemen dari A {A'} adalah anggota himpunan semesta selain anggota A.

   Contoh : S = {1,2,3,4,5,6} dan A= {4,5,6} maka A' = {1,2,3}

D. HUKUM OPERASI HIMPUNAN

1. Komutatif

   Sifat komutatif irisan : AnB = BnA

   Sifat komutatif gabungan : AuB = BuA

2. Asosiatif

   Sifat asosiatif irisan : An(BnC) = (AnB)nC

   Sifat asosiatif gabungan : Au(BuC) = (AuB)uC

3. Distributif

   Sifat distributive irisan terhadap gabungan : An(BuC) = (AnB)u(AnC)

   Sifat distributive gabungan terhadap irisan : Au(BnC) = (AuB)n(AuC)

4. De Morgan

   * (AnB)` = A`u B` Menjadi (AuB)` = A` n B`

   * (AnB)` = A` u B`

   * (AuB)` = A` n B`

5. Himpunan Ekivalen

   a. n(AuB)= n(S) - n(AuB)'

   b. n(AuB) = n(A) + n(B) - n(AnB)

   c. n(AuBuC) = n(A) + n(B) + n(C) - n(AnB) - n(AnC) - n(BnC) + n(AnC)

E. CONTOH SOAL

A = {2,3,5,7} , B = {3,4,5,8,10} , dan C = {0,1,2,3}.

* Sifat komutatif irisan : AnB = BnA {3,5} = {3,5}

* Sifat komutatif gabungan : AuB = BuA

  AuB = {2,3,4,5,7,8,10} BuA = {2,3,4,5,7,8,10}

* Sifat asosiatif irisan : An(BnC) = (AnB)nC

  An(BnC) = {2,3,5,7}n{3} Jadi {3}

  (AnB)nC = {3,5}n{0,1,2,3} jadi {3}

* Sifat asosiatif gabungan : Au(BuC) = (AuB)uC

  Au(BuC) = {2,3,5,7} u {0,1,2,3,4,5,8,10} Jadi {0,1,2,3,4,5,7,8,10}

  (AuB)uC = {2,3,4,5,7,8,10}u {0,1,2,3} Jadi {0,1,2,3,4,5,7,8,10}

* Sifat distributive irisan terhadap gabungan : An(BuC) = (AnB) u (AnC)

An(BuC) = {2,3,5,7} n {0,1,2,3,4,5,8,10} Jadi {2,3,5}

(AnB) u .(AnC) = {3,5} u {2,3} Jadi {2,3,5}

* Sifat distributive gabungan terhadap irisan : Au(BnC) = (AuB) n (AuC)

Au(BnC) = {2,3,5,7} u {3} Jadi {2,3,5,7}

(AuB)n(AuC) = {2,3,4,5,7,8,10} n {0,1,2,3,5,7} Jadi {2,3,5,7}

MODUL DERET HITUNG

A. Konsep Dasar Deret

Deret adalah rangkaian bilangan yang tersusun secara teratur & memenuhi kaidah-kaidah tertentu. Bilangan-bilangan yang merupakan unsur & pembentuk suatu deret dinamakan **suku.** Keteraturan rangkaian bilangan yang membentuk sebuah deret terlihat pada "pola perubahan" bilangan-bilangan tersebut dari satu suku ke suku berikutnya.

Dilihat dari jumlah suku yang membentuknya deret digolongkan atas deret berhingga dan deret tak hingga. Sedangkan dilihat dari segi pola perubahan bilangan pada suku-sukunya deret bisa dibedakan menjadi deret hitung, deret ukur & deret harmonis.

Pada modul ini akan dijelaskan lebih jauh tentang deret hitung Dua hal yang penting untuk diketahui atau dihitung dalam setiap persoalan deret,yaitu besarnya *nilai pada suatu suku tertentu dan jumlah nilai deret sampai dengan suku yang tertentu*

Deret hitung adalah deret yg perubahan suku-sukunya berdasarkan *penjumlahan* terhadap sebuah bilangan tertentu . Bilangan yang membedakan suku-suku dari deret hitung ini dinamakan *pembeda*, yang tak lain merupakan selisih antara nilai-nilai dua suku yang berurutan.

Rumusnya :

a. Suku ke-n : $\mathbf{Un = a + (n-1)\, b}$

b. Jumlah bilangan sampai suku ke-n : $\mathbf{Sn = n/2\, (a + Un)}$

$\mathbf{Sn = n/2\ \{ 2a + (n-1)\, b \}}$

Dimana : a = suku pertama

b = beda (selisih antara suku tertentu dengan suku sebelumnya)

n = banyaknya suku

B. Penerapan Deret Hitung dalam Ekonomi

Prinsip-prinsip deret banyak diterapkan untuk menelaah perilaku bisnis dan ekonomi, baik secara langsung maupun secara tidak langsung. Prinsip deret hitung banyak diterapkan dalam menganalisa perilaku perkembangan kegiatan usaha misalnya poduksi, biaya, pendapatan, penggunaan tenaga kerja, atau penanaman modal. Sedangkan prinsip deret ukur bersama-sama dengan konsep logaritma menganalisa perilaku pertumbuhan . Oleh karena itu prinsip-prinsip deret hitung dapat digunakan untuk menganalisa perkembangan variabel-variabel kegiatan usaha tersebut. Berpola seperti deret hitung disini maksudnya adalah variabel yang bersangkutan bertambah secara konstan dari satu periode ke periode berikutnya.

C. Contoh Soal

1. Perusahaan "SARI CINTAKU" memproduksi 2500 unit pakaian anak-anak pada tahun pertama dan produksinya mengalami peningkatan sebanyak 100unit setiap tahunnya. Berapa produksi pakaian anak anak tersebut pada tahun ketiga dan berapakah produksi pakaian anak-anak tersebut sampai dengan tahun ketiga ?

   Dik : a = 2500 , b = 100 , n = 3

   Dit : **U**3 dan **S**3

   Jawab : **U**n = a + (n-1)b   **S**n = n/2 (a + Un)

   U3 = 2500 + (3-1)100 = 2700   **S**3 = 3/2 (2500 + 2700) = 7800

2. Besar penerimaan PT "Yulia Volkova" dari hasil penjualan barangnya Rp. 720.000.000 pada tahun kelima dan Rp. 980.000.000 juta pada tahun ketujuh. Apabila, perkembangan penerimaan penjualan tersebut berpola seperti deret hitung, berupa perkembangan penerimaanya per tahun ? berapa besar penerimaan pada tahun pertama dan pada tahun keberapa penerimaannya sebesar Rp. 460.000.000 juta ?

   Dik **:** **S**7 = 980.000.000, **S**5 = 720.000.000

   Dit : a , b , dan n saat penerimaan 460.000.000 ?

   Jwb: S7 = a + 6 b = 980.000.000

   S5 = a + 4 b = 720.000.000 –

   2 b = 260.000.000

   b = 130.000.000

   Perkembangan penerimaan per tahun sebesar Rp 130.000.000 juta

$$
\begin{aligned}
S5 &= a + 4\ b \\
720.000.000 &= a + 4\ b \\
720.000.000 &= a + 4\ (130.000.000) \\
720.000.000 &= a + 520.000.000 \\
a &= 720.000.000 - 520.000.000 \\
a &= 200.000.000
\end{aligned}
$$

Penerimaan pada tahun pertama sebesar 200.000.000 juta

$$
\begin{aligned}
Sn &= a + (n - 1)\ b \\
460.000.000 &= 200.000.000 + (n - 1)\ 130.000.000 \\
460.000.000 &= 200.000.000 + 130.000.000\ n - 130.000.000 \\
390.000.000 &= 130.000.000\ n \\
\mathbf{n} &= 3
\end{aligned}
$$

Penerimaan sebesar Rp 460.000.000 juta diterima pada tahun ketiga

MODUL DERET UKUR

1. Konsep Dasar Deret

A. Definisi Matematika

- **Deret** adalah rangkaian bilangan yang tersusun secara teratur dan memenuhi kaidah-kaidah tertentu.
- **Suku** adalah bilangan-bilangan yang merupakan unsur dan pembentuk suatu deret.

Dilihat dari segi pola perubahan bilangan pada suku-sukunya deret bisa dibedakan menjadi **Deret Hitung, Deret Ukur,** dan **Deret Dinamis**. Pada bagian ini hanya akan dibahas tentang deret ukur . Adapun definisinya sebagai berikut:

- **Deret Ukur** ialah deret yang suku-sukunya dibedakan dengan perbandingan suku per-urutan yang memiliki nilai tetap yang sering dinamakan dengan **pembanding/rasio {r}**

Dilihat dari jumlah suku yang membentuknya, deret digolongkan atas ***deret berhingga*** dan ***deret tak berhingga*.** Adapun definisinya sebagai berikut:

- **Deret berhingga** adalah deret yang jumlah suku-sukunya tertentu atau terbatas
- **Deret tak berhingga** adalah deret yang jumlah suku-sukunya tidak tertentu atau tidak terbatas.

B. Definisi Dalam Penerapan Ekonomi

- **Model Bunga Majemuk**

  Model Bunga Majemuk merupakan **Deret Ukur** dalam kasus simpan pinjam dan kasus investasi. Dengan model ini dapat dihitung nilai modal di masa yang akan datang **ditambah** dengan **akumulasi penambahan bunga,** misalnya besarnya pengembalian kredit **di masa yang akan datang** berdasarkan **tingkat bunga**nya, mengukur **nilai sekarang** dari suatu jumlah hasil investasi yang akan diterima di masa yang akan datang, dan sebagainya.

- **Model Bunga Sinambung**

  Jika frekuensi pembayaran bunga per tahun (**m**) sangat besar, bunga yang diperhitungkan sangat sering (terus-menerus) dalam setahun, maka model deret ukur yang digunakan adalah metode deret ukur tak terhingga atau sinambung

- **Model Present Value**

  Present value (nilai sekarang) merupakan kebalikan dari compound value (nilai majemuk) adalah **besarnya jumlah uang, pada permulaan periode** atas dasar tingkat tertentu dari sejumlah uang yang baru akan kita terima beberapa waktu/ periode yang akan datang.

- **Model Pertumbuhan Penduduk**

  Metode ini dinyatakan oleh **Malthus**, Beliau menyatakan bahwa pertumbuhan penduduk dunia dipengaruhi oleh deret ukur atau perubahan berdasarkan rasio tertentu.

C. Rumus-rumus dan Contoh Soal

a. Rumus Matematika

- **Rumus deret ukur**

  a. Suku ke-n : **Un = ar^(n-1)**

  Keterangan : a = Suku pertama
  r = pembanding atau ratio
  n = banyaknya suku

  b. Jumlah suku ke – n

  Deret ukur berhingga:

  Sn = a(r^n-1) / ***r-1*** ***,untuk r> 1***

  Sn = (1 – r^n)/ ***1- r*** ***,Untuk r< 1***

  Deret ukur tak berhingga:

  Sn = a(1- r^n) / 1- r , jika n = ~ --> r^n = r~ = 0

  Sn = a(1- r~) ***/*** *1- r = a(1-0) / 1-r --> = a / 1 – r*

2. Rumus Deret Ukur Dalam Penerapan Ekonomi

A. Model Bunga Majemuk

Fn = P (1 + I)^n   Fn = P (1 + (i/m))^(m.n)

Keterangan:

Fn = Jumlah Investasi di masa yang akan datang

P = Jumlah Investasi sekarang / present value

I = Tingkat bunga per tahun

n = Jumlah tahun

m = Frekuensi pembayaran bunga dalam setahun

B. Model Bunga sinambung

Fn = P **x** e **x** n

Keterangan :

e = eksponen , = 2,718

C. Model present Value

P = Fn / (1+I)^n

P = Fn / (1 + (i/m)) ^ (m.n)

D. Metode Pertumbuhan Penduduk

Pt = P1.R^(t-1) -→ dimana R = 1 + r

Keterangan :

Pt **=** Jumlah penduduk pada tahun ke-t

P1 **=** Jumlah penduduk pada tahun pertama (basis)

r **=** persentase pertumbuhan per-tahun

t = indeks waktu (tahun)

3. Contoh Soal

Contoh :

1) 5, 10, 20, 40, 80, 160 (pembanding/ratio = 2 , contoh : 10/2,20/10,40/20)
2) 512, 256, 128, 64, 32, 16 (pembanding/ratio = 0,5, contoh : 256/512)

Dit : **a.** U10 ? (untuk ratio = 2 dan = 0,5)

b. S10 ? (untuk ratio = 2 dan = 0,5)

Jawab:

a. Dik : a1 = 5,a2 = 512
   1) U10 (ratio =2) = $(5)(2)^{10-1}$ **=** $(5)(2)^9$ = 2560
   2) U10 (ratio =0,5) = $(512)(0,5)^{10-1}$ = $(512)(0,5)^9$ = 1

b. Berdasarkan point a.
   1) S10 = 5 $(2^{10} – 1)$ / 2 – 1 = 5(1023) / 1 = 5115 (r > 1, lihat bagian rumus)
   2) S10 = 512 $(1 – 0,5^{10})$ / 1- 0,5 = 512 (1023/1024) / 0,5 = 1023 (r<1, lihat bagian rumus)

4. Contoh Soal Dalam Penerapan Ekonomi

- **Model Bunga Majemuk**

  Seorang nasabah bank meminjam uang di Bank sebanyak Rp. 5 juta untuk jangka waktu 3 tahun, dengan tingkat bunga 2 % per tahun. Berapa jumlah seluruh uang yang harus dikembalikannya pada saat pelunasan ? Seandainya perhitungan pembayaran bunga bukan tiap tahun, melainkan tiap semester, berapa jumlah yang harus ia kembalikan ?

  Jawab :

Dik : P = 5.000.000	Fn = P (1+I)^ n
N = 3	F3 = 5.000.000 (1 + 0,02) ^ 3
I = 2% = 0,02	= 5.000.000 (1,061208) = Rp. 5.306.040

  Seandainya pembayaran bunga dilakukan tiap semester, maka:

  Fn = P (1 +i/m) ^mn → F 3 = 5.000.000 (1 + 0,01) ^ 6

  = 5.000.000 (1,061208) = Rp 5. 307.600

- **Model Bunga Sinambung**

  Nyonya Shoffa mempunyai tabungan deposito **darurat** dari bank pemerintah pada masa perang dengan Malaysia dengan frekuensi pembayaran bunga setiap 7 menit sekali selama 10 tahun. Nilai tabungan nyonya Shoffa di bank senilai Rp 7.500.000 pada saat pertama kali setoran. Berapakah jumlah uang nyonya Shoffa 10 tahun lagi ?

  Jawab:

  Fn = P.e.n   Dimana e : 2,718

  F10   = 7500000 * 2,718 * 10

  = Rp 203 850 000

- **Model Present Value**

  Tuan Bayu mempunyai tabungan deposito dengan nilai Rp 7.500.000 dengan tingkat bunga sebesar 5%/tahun, pembayaran dilakukan per tahun. Tuan Bayu telah menabung semenjak 5 tahun yang lalu tanpa menyetor sekalipun setelah setoran yang pertama itu. Berapakah saldo tuan Bayu 5 tahun sebelumnya (Pn) ?

  Jawab:

  Pn = Fn / (1+i) ^n

  P5 = F5 / (1+0.05) ^ 5

  P5 = Rp 7.500.000 / (1.05) ^5

  P5 = Rp 7.500.000 / 1.2762815625

  P5 = Rp 5.876.446, 249

- **Model Pertumbuhan Penduduk**

  Penduduk suatu kota berjumlah 1 juta jiwa pada tahun 1991, tingkat pertumbuhannya 4% per tahun. Hitunglah jumlah penduduk kota tersebut pada tahun 2006. Jika mulai tahun 2006 pertumbuhannya menurun menjadi 2,5%, berapa jumlahnya 11 tahun kemudian ?

Jawab:

P1 = 1 Juta

r = 0,04

R = 1,04

P2006 = P16 = 1000000 (1,04) ^ 15
= 1000000 (1,800943)
= 1.800.943 Jiwa

P1 = 1.800.943

r = 0,025

R = 1,025

P11 tahun kemudian = P11

P11 = 1.800.943 (1,025) ^ 10 = 2.305.359 Jiwa

Daftar Pustaka

Dumairy, Matematika Terapan untuk Bisnis dan Ekonomi, edisi kedua, 1995

Universitas Gunadarma, Buku Diktat Matematika Ekonomi, 2002

MODUL FUNGSI LINIER 1

A. PENGERTIAN

Fungsi adalah suatu bentuk hubungan matematis yang menyatakan hubungan ketergantungan (hubungan fungsional) antara suatu variabel dengan variabel lainnya. Sedangkan yang dimaksud dengan fungsi linier adalah fungsi yang pangkat tertinggi dari variabelnya adalah pangkat satu, sehingga membentuk garis lurus dengan kemiringan tertentu (m).

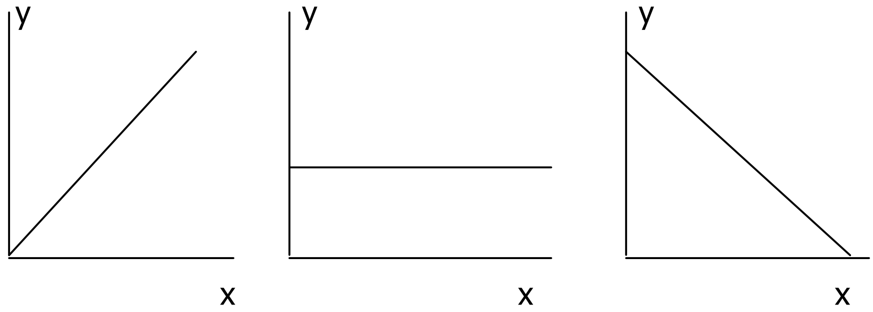
Bentuk Umum: $\boxed{y = mx + c}$

dimana y = dependent variabel (variabel terikat)

m = koefisien arah/kemiringan/besarnya tambahan nilai y untuk setiap tambahan 1 unit x

x = independent variabel (variabel bebas)

c = konstanta



m = positif   m = 0   m = negatif

Koefisien arah/kemiringan/gradien dapat dicari dengan menggunakan rumus :

$$\boxed{m = \frac{(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)}}$$

Contoh:

Carilah gradien yang melalui titik (-5,2) dan titik (-3,6)!!!

Penyelesaian : $m = \dfrac{(6 - 2)}{-3 - (-5)} = 2$

B. CARA PEMBENTUKAN FUNGSI LINIER

Ada 4 macam cara yang dapat ditempuh untuk membentuk sebuah persamaan linier, masing-masing berdasarkan ketersediaan data yang diketahui. Keempat cara yang dimaksud adalah:

1. Cara Koordinat Lereng

Sebuah persamaan linier dapat dibentuk dari sebuah titik dan suatu lereng (kemiringan/ gradien). Apabila diketahui sebuah titik A dengan koordinat (x_1,y_1) dan kemiringan/ gradien adalah m, maka rumus persamaan liniernya adalah :

$$\boxed{(y - y_1) = m\,(x - x_1)}$$

Contoh : Titik A (2,5) dengan m = 3

$$\begin{aligned} \text{Persamaan}\quad y - y_1 &= m\,(x - x_1) \\ y - 5 &= 3\,(x - 2) \\ y - 5 &= 3x - 6 \\ y &= 3x - 1 \end{aligned}$$

2. Cara Dwi-koordinat

Dari 2 buah titik dapat dibentuk sebuah persamaan linier yang memenuhi kedua titik tersebut. Apabila diketahui dua buah titik A dan B dengan koordinat masing-masing (x_1,y_1) dan (x_2,y_2), maka rumus persamaan liniernya adalah:

$$\boxed{\frac{(y - y_1)}{(y_2 - y_1)} = \frac{(x - x_1)}{(x_2 - x_1)}}$$

Contoh : Diketahui titik A (2,8) dan titik B (1,5), maka persamaan liniernya :

$$\frac{(y - 8)}{(5 - 8)} = \frac{(x - 2)}{(1 - 2)} \qquad \frac{(y - 8)}{-3} = \frac{(x - 2)}{-1}$$

$$\begin{aligned} -1(y - 4) &= -3(x - 2) \\ -y + 8 &= -3x + 6 \\ -y &= -3x + 6 - 8 \\ y &= 3x - 6 + 8 \\ y &= 3x + 2 \end{aligned}$$

3. **Cara Penggal Lereng**

Sebuah persamaan linier dapat pula dibentuk apabila diketahui penggalnya (konstanta) pada salah satu sumbu dan lereng garis (gradien) yang memenuhi persamaan tersebut. Dalam hal ini rumus persamaan liniernya adalah :

$$\boxed{\mathbf{y = mx + c}}$$

Dimana : c = penggal (konstanta), m = lereng (gradien)

Contoh :

Andaikan konstanta dan gradien garis y = f(x) masing-masing adalah 3 dan 0,5, maka persamaan liniernya adalah...

Dik : m = 0,5 ; c = 3 maka persamaan linier : **y = 0,5x + 3**

4. **Cara Dwi-penggal**

Apabila diketahui penggal garis tersebut pada masing-masing sumbu, yakni penggal pada sumbu vertikal (ketika x = 0) dan penggal pada sumbu horizontal (ketika y = 0).

Rumus persamaan liniernya:

$$\boxed{y = a - ((a / c)x)}$$

dimana : a = penggal pada sumbu vertical, c = penggal pada sumbu horizontal

Contoh :

Jika penggal sebuah garis pada sumbu vertikal dan horizontal masing-masing 6 dan -3, maka persamaan linier yang memenuhi adalah **y = 6 - (6 / -3)x   y = 6 + 2x**

Berdasarkan letak ruas variabel-variabelnya, fungsi linier dapat dibedakan menjadi 2 jenis yaitu fungsi eksplisit dan fungsi implisit. ***Fungsi eksplisit*** adalah fungsi yang variabel bebas dan variabel terikatnya terletak di ruas yang berlainan. Contoh: $y = 3x - 9$. Sedangkan ***fungsi implisit*** adalah fungsi yang variabel bebas dan variabel terikatnya terletak di satu ruas yang sama , diruas kiri semua atau diruas kanan semua.

Contoh: $y - 3x + 9 = 0$ atau $0 = 3x + 9 - y$.

Setiap fungsi eksplisit senantiasa dapat diimplisitkan, tetapi tidak semua fungsi implisit dapat diubah menjadi bentuk eksplisit.

Contoh: Persamaan implisit $x^3 - 6x + y^2 - 4y = 0$ adalah mustahil untuk dieksplisitkan.

C. HUBUNGAN 2 BUAH GARIS LURUS

Dua buah garis lurus mempunyai 4 macam kemungkinan bentuk hubungan

1. **Berhimpit**

   Apabila persamaan garis yang satu merupakan kelipatan dari (proporsional terhadap) persamaan garis yang lain, maka dengan demikian $y = m_1 x + c_1$ akan berhimpit dengan garis $y = m^2 x + c^2$ jika $y_1 = n \cdot y_2$; $c_1 = n \cdot c_2$ dan $m_1 = n \cdot m_2$

2. **Sejajar**

   Apabila lereng garis yang satu sama dengan lereng garis yang lain, maka dengan demikian garis $y = m_1x + c_1$ akan sejajar dengan $y = m_2x + c_2$ jika $m_1 = m_2$ dan tentu saja $c_1 \neq c_2$ (jika $c_1 = c_2$ kedua garis bukan saja sejajar tetapi juga berimpit).

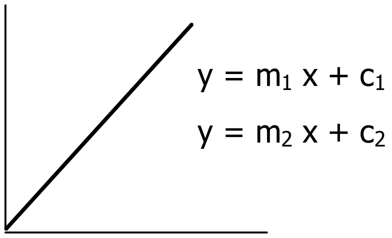
3. **Berpotongan**

   Apabila lereng garis yang satu tidak sama dengan lereng garis yang lain, maka dengan demikian garis $y = m_1 x + c_1$ akan berpotongan dengan $y = m_2 x + c_2$ jika $m_1 \neq m_2$.

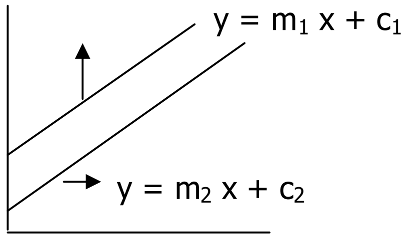
4. **Tegak lurus**

   Apabila lereng garis yang satu merupakan kebalikan dari lereng garis yang lain dengan tanda berlawanan, maka dengan demikian garis $y = m_1 x + c_1$ akan tegak lurus dengan garis $y = m_2x + c_2$ jika $m1 = -1/ m_2$ atau $m_1 . m_2 = -1$.

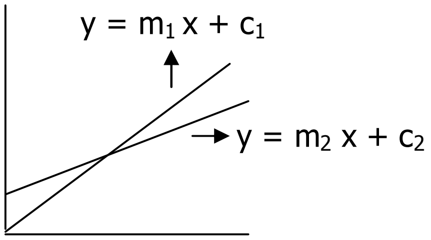
1. berimpit



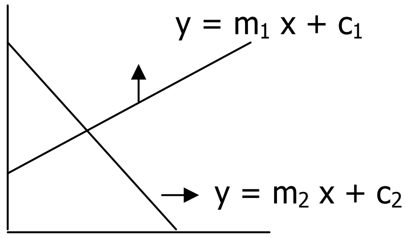
2. sejajar



3. berpotongan



4. Tegak lurus

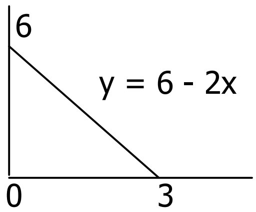


D. PENGGAMBARAN FUNGSI LINIER

Gambar dari sebuah fungsi dapat dihasilkan dengan cara menghitung koordinat titik-titik yang memenuhi persamaannya, dan kemudian memindahkan pasangan-pasangan titik tersebut ke sistem sumbu silang. Dalam menggambarkan suatu fungsi terdapat kebiasaan meletakkan variabel bebas pada sumbu horizontal (absis) dan variabel terikat pada sumbu vertikal (ordinat).

Penggambaran fungsi linier paling mudah dilakukan. Sesuai dengan namanya, setiap fungsi linier akan menghasilkan sebuah garis lurus (kurva linier).

Contoh : $y = 6 - 2x$ jika $x = 0$ maka $y = 6$ dan jika $y = 0$ maka $x = 3$



Letak garis atau kurva dari sebuah fungsi linier tidak selalu di kuadran pertama, pada x positif dan y positif. Melainkan mungkin pula di kuadran II, III dan IV. Hal ini tergantung pada besar kecilnya - maksudnya positif atau negatif nilai-nilai x dan y. Perlu dicatat, analisis matematika dalam ekonomi lebih memusatkan diri pada kuadran pertama.

E. PENERAPAN EKONOMI

Fungsi linier sangat lazim diterapkan dalam ilmu ekonomi, baik dalam pembahasan ekonomi mikro maupun ekonomi makro.

- **Penerapan Fungsi Linier dalam Teori Ekonomi Mikro**
  1. Fungsi permintaan, fungsi penawaran dan keseimbangan pasar
  2. Pengaruh pajak-spesifik terhadap keseimbangan pasar
  3. Pengaruh pajak-proporsional terhadap keseimbangan pasar
  4. Pengaruh subsidi terhadap keseimbangan pasar
- **Penerapan Fungsi Linier dalam Teori Ekonomi Makro**
  1. Fungsi konsumsi dan fungsi tabungan
  2. Pendapatan disposibel
  3. Fungsi pajak
  4. Fungsi investasi
  5. Fungsi impor
  6. Pendapatan nasional

1. Fungsi Permintaan, Penawaran Dan Keseimbangan Pasar

Permintaan dan Penawaran

Bentuk Umum fungsi permintaan :

$$\boxed{Qd = a - bP}$$

Untuk mengetahui apakah suatu fungsi merupakan fungsi permintaan ataukah fungsi penawaran dapat dengan melihat hubungan antara P dan Q dengan kondisi fungsi tersebut harus berbentuk fungsi eksplisit. Fungsi permintaan menunjukkan bahwa P dan Q mempunyai hubungan negatif (tanda yang berlawanan). Ini mencerminkan hukum permintaan, bahwa apabila harga naik maka jumlah yang diminta akan berkurang dan sebaliknya, oleh karena itu kurva permintaan berslope negatif. Kurva permintaan diatas menggambarkan bahwa pada saat harga sebesar P_1, jumlah barang yang diminta konsumen sebanyak Q_1 unit. Tetapi pada saat harga naik menjadi P_2 maka jumlah barang yang diminta konsumen turun menjadi Q_2 unit.

Selain bentuk umum yang ada diatas fungsi permintaan dapat juga didefinisikan sebagai: **Fungsi permintaan pasar untuk sebuah produk adalah pernyataan hubungan antara jumlah yang diminta dan semua faktor yang memperbaharui.**

Bentuk Umum fungsi penawaran : $Qs = -a + bP$

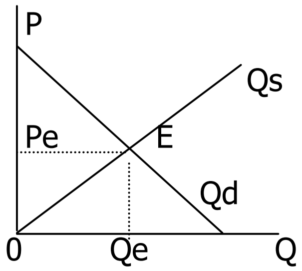
Dari persamaan tersebut terlihat bahwa P dan Q mempunyai hubungan positif. Ini mencerminkan hukum penawaran, bahwa apabila harga naik maka jumlah yang ditawarkan akan bertambah dan sebaliknya, oleh karena itu kurva penawaran berslope negatif.

Pada saat harga sebesar P_1, kuantitas yang ditawarkan produsen sebanyak Q_1 unit. Pada saat harga dipasar naik menjadi P_2 maka produsen akan menambah kuantitas yang ditawarkan menjadi Q_2 unit.

Selain bentuk umum yang ada diatas fungsi permintaan dapat juga didefinisikan sebagai: **Fungsi penawaran pasar untuk sebuah produk adalah pernyataan hubungan antara jumlah yang diminta dan semua faktor yang memperbaharui .**

Keseimbangan pasar

Pasar suatu macam barang dikatakan berada dalam keseimbangan apabila jumlah barang yang diminta di pasar tersebut sama dengan jumlah barang yang ditawarkan. Secara matematika dan grafik, hal ini ditunjukkan dengan persamaan **Qd = Qs**. Yakni pada perpotongan kurva permintaan dengan kurva penawaran. Pada posisi keseimbangan pasar tercipta harga keseimbangan (Equilibrium Price) dan jumlah keseimbangan (Equilibrium Quantity).



Keterangan :

Qd = jumlah permintaan

Qs = jumlah penawaran

Pe = harga keseimbangan

Qe = jumlah keseimbangan

E = titik keseimbangan

Contoh soal:

Fungsi permintaan akan suatu barang ditunjukkan oleh persamaan P = 12 - Q sedangkan persamaan penawarannya P = 3 + 0,5 Q. Berapa harga keseimbangan dan jumlah keseimbangan yang tercipta di pasar ? Gambarkan grafiknya !!!

<u>Penyelesaian :</u>

Permintaan	P = 12 - Q	Q = 12 - P
Penawaran	P = 3 + 0,5Q	Q = -6 + 2P

12 - P = -6 + 2P

-3P = -18

Pe = 6

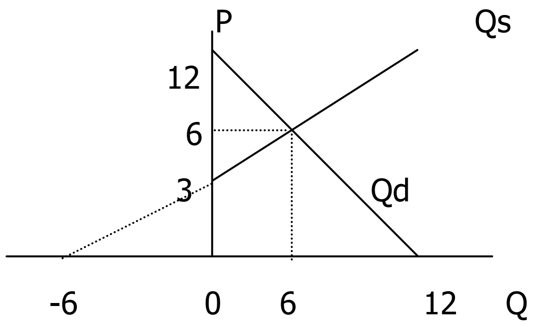
Qe = 12 - 6

Qe = 6 ***Keseimbangan pasar*** (6, 6)

<u>Penggambaran grafik :</u>

Qd = 12 - P jika P = 0 ; Q = 12 & jika Q = 0 ; P =12

Qs = -6 + 2P jika P = 0 ; Q = -6 & jika Q = 0 ; P = 3



Analisa: Pada saat fungsi permintaan P = 12 - Q dan fungsi penawaran P = 3 + 0,5Q harga keseimbangan yang tercipta di pasar adalah Rp. 6,- dengan kuantitas keseimbangan sebesar 6 unit. Pada titik keseimbangan tersebut harga yang ditawarkan produsen sama dengan harga yang diinginkan konsumen dan pada keseimbangan pasar itu pulalah kuantitas yang ditawarkan produsen dan kuantitas yang diminta konsumen sama.

2. Pengaruh Pajak Spesifik terhadap Keseimbangan Pasar

Pajak spesifik adalah pajak yang dikenakan per satu unit barang yang diproduksi atau dijual. Pengenaan pajak tersebut mempengaruhi harga keseimbangan dan jumlah keseimbangan. Dengan adanya pengenaan pajak (t) atas setiap unit barang, maka posisi keseimbangan pasar akan berubah. Produsen akan menawarkan harga jualnya lebih tinggi dari harga keseimbangan sebelum pajak yang menyebabkan jumlah keseimbangannya menjadi lebih sedikit. Hal ini juga akan menyebabkan adanya pergeseran pada kurva penawaran.

Fungsi penawaran sebelum pajak : $\boxed{P = a + bQ}$

Fungsi penawaran sesudah pajak : $\boxed{P = a + bQ + t}$

Keseimbangan pasarnya adalah : **Qd = Qs**

Pajak tanggungan konsumen : $\boxed{tk = Pe_t - Pe}$

Pajak tanggungan produsen : $\boxed{tp = t - tk}$

Pajak yang diterima oleh pemerintah : $\boxed{T = t \times Qet}$

Contoh soal :

Fungsi permintaan akan suatu barang ditunjukkan oleh persamaan P = 12 - Q sedangkan persamaan penawarannya P = 3 + 0,5Q. Terhadap barang tersebut dikenakan pajak sebesar 3 per unit. Berapa harga keseimbangan dan jumlah keseimbangan sebelum dan sesudah pajak ? Gambarkan grafiknya !!!

Penyelesaian :

Permintaan P = 12 - Q Q = 12 - P

Penawaran P = 3 + 0,5Q Q = -6 + 2P

Keseimbangan pasar *sebelum* pajak **(6, 6)**

Keseimbangan pasar sesudah pajak

t = 3 $\longrightarrow$ P = 3 + 0,5Q + 3

P = 6 + 0,5Q Q = -12 + 2P

12 - P = -12 + 2P

-3P = -24

Pe_t = 8

Qet = 12 - 8

Qet = 4 Keseimbangan *setelah* pajak **(4, 8)**

Pajak tanggungan konsumen : tk = 8 - 6 = 2

Pajak tanggungan produsen : tp = 3 - 2 = 1

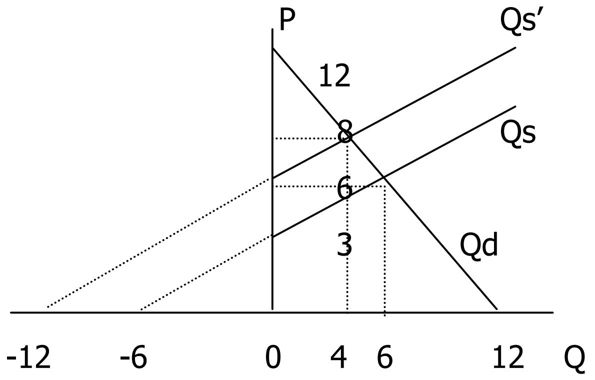
Pajak yang diterima pemerintah : T = 3 x 4 = 12

<u>Penggambaran grafik</u>

Qd = 12 - P $\longrightarrow$ jika P = 0 ; Q = 12 & jika Q = 0 ; P =12

Qs = -6 + 2P $\longrightarrow$ jika P = 0 ; Q = -6 & jika Q = 0 ; P = 3

Qs' = -12 + 2P $\longrightarrow$ jika P = 0 ; Q = -12 & jika Q = 0 ; P = 6



3. **Pengaruh Pajak Proporsional Terhadap Keseimbangan Pasar**

Pajak proporsional adalah suatu pajak yang dikenakan terhadap suatu barang yang besarnya ditetapkan berdasarkan prosentase (%) tertentu dari harga jualnya. Jika pajak proporsional yang dikenakan sebesar t % dari harga jual (P), maka :

Fungsi penawaran sebelum pajak : $\boxed{\mathbf{P = a + bQ}}$

Fungsi penawaran sesudah pajak : $\boxed{P = a + bQ + t.P}$

Pajak tanggungan konsumen : $\boxed{tk = Pe_t - Pe}$

Pajak tanggungan produsen : $\boxed{tp = (t \times Pe_t) - tk}$

Pajak yang diterima oleh pemerintah : $\boxed{T = (t \times Pe_t) \times Qe_t}$

Contoh soal :

Fungsi permintaan akan suatu barang ditunjukkan oleh persamaan P = 12 - Q sedangkan persamaan penawarannya P = 3 + 0,5Q. Kemudian pemerintah mengenakan pajak sebesar 25% dari harga jual. Berapa harga keseimbangan dan jumlah keseimbangan sebelum dan sesudah pajak ?

<u>Penyelesaian :</u>

Permintaan P = 12 - Q Q = 12 - P

Penawaran P = 3 + 0,5Q Q = -6 + 2P

Keseimbangan pasar *sebelum* pajak **(6, 6)**

<u>Keseimbangan pasar sesudah pajak</u>

t = 0,25 P = 3 + 0,5Q + 0,25P ⇒ 0,75P = 3 + 0,5Q

P = 4 + 2/3 Q

Q = -6 + 1,5 P

Qd	**=**	**Qs**	Keseimbangan pasar *sesudah* pajak (4,8 ;, 7,2)
12 – P	=	-6 + 1,5 P	Pajak tanggungan konsumen : tk = 7,2 - 6 = 1,2
-2,5 P	=	-18	Pajak tanggungan produsen : tp = (25% x 7,2) – 1,2 = 0,6
Pe_t	=	7,2	Pajak yang diterima pemerintah : T = (25% x 7,2) x 4,8 = 8,6
Qe_t	=	12 – 7,2	
Qe_t	=	4,8	

Penggambaran grafiknya sama seperti contoh soal sebelumnya !!

4. Pengaruh Subsidi Terhadap Keseimbangan Pasar

Subsidi adalah kebalikan atau lawan daripada pajak, sehingga seringkali disebut pajak negatif. Subsidi yang diberikan atas produksi atau penjualan suatu barang menyebabkan harga jual barang tersebut lebih rendah, sehingga titik keseimbangannya pun akan bergeser menjadi lebih rendah.

Fungsi penawaran sebelum subsidi : $\boxed{P = a + bQ}$

Fungsi penawaran sesudah subsidi : $\boxed{P = a + bQ - s}$

Keseimbangan pasarnya adalah : **Qd = Qs**

Subsidi yang dinikmati konsumen : $\boxed{sk = Pe - P}$

Subsidi yang dinikmati produsen : $\boxed{sp = s - sk}$

Subsidi yang diberikan pemerintah adalah : $\boxed{S = Qes \times s}$

Contoh soal :

Fungsi permintaan akan suatu barang ditunjukkan oleh persamaan P = 12 - Q sedangkan persamaan penawarannya P = 3 + 0,5Q. Terhadap barang tersebut diberikan subsidi oleh pemerintah sebesar 1,5 per unit. Berapa harga keseimbangan dan jumlah keseimbangan sebelum dan sesudah subsidi ? Gambarkan grafiknya !!!

<u>Penyelesaian :</u>

Permintaan P = 12 - Q Q = 12 - P

Penawaran P = 3 + 0,5Q Q = -6 + 2P

Keseimbangan pasar *sebelum* subsidi (6, 6)

<u>Keseimbangan pasar sesudah subsidi</u>

s = 1,5 ⟶ P = 3 + 0,5Q - 1,5

P = 1,5 + 0,5Q Q = -3 + 2P

12 – P = -3 + 2P

-3P = -15

Pes = 5

Qes = 12 - 5

Qes = 7 $\longrightarrow$ Keseimbangan pasar *sesudah* subsidi (7, 5)

Subsidi yang dinikmati konsumen : sk = 6 - 5 = 1

Subsidi yang dinikmati produsen : sp = 1,5 - 1 = 0,5

Subsidi yang diberikan pemerintah : S = 1,5 x 7 = 10,5

<u>Penggambaran grafik</u>

Qd = 12 - P jika P = 0 ; Q = 12 & jika Q = 0 ; P =12

Qs = -6 + 2P jika P = 0 ; Q = -6 & jika Q = 0 ; P = 3

Qs' = -3+ 2P jika P = 0 ; Q = -3 jika Q = 0 ; P = 1,5

MODUL FUNGSI LINIER 2

A. Fungsi Konsumsi dan Fungsi Tabungan

Pendapatan masyarakat suatu negara secara keseluruhan atau pendapatan nasional dialokasikan ke dua kategori penggunaan, yaitu digunakan untuk konsumsi dan sisanya untuk ditabung.

$$\boxed{Y = C + S}$$

Dimana : Y = Pendapatan Nasional, C = Konsumsi,S = Saving (Tabungan)

1. Fungsi Konsumsi

Merupakan sebuah fungsi yang menjelaskan hubungan antara konsumsi dan pendapatan nasional yang secara umum dirumuskan sebagai berikut :

$$\boxed{\begin{aligned} \mathbf{C} &= \mathbf{f(Y)} \\ &= \mathbf{Co + cY} \end{aligned}}$$

Dimana :

Co = Konsumsi Otonom

c = MPC (Marginal Propensity to Consume) = $^{\Delta C} / _{\Delta Y}$

>. Konstanta Co menunjukkan besarnya konsumsi nasional pada saat pendapatan nasional sebesar nol (0).

>. Koefisien c (MPC) mencerminkan besarnya tambahan konsumsi sebagai akibat adanya tambahan pendapatan nasional sejumlah tertentu.

>. ΔC menunjukkan besarnya perubahan konsumsi dan ΔY menunjukkan besarnya perubahan dalam pendapatan nasional yang mengakibatkan besarnya konsumsi termaksud.

Perhatikan : 1 > MPC > ½

Keterangan :

- MPC < 1 menunjukkan bahwa tambahan pendapatan yang diterima seseorang tidak seluruhnya dipergunakan untuk konsumsi, melainkan sebagai saving (tabungan). Contoh : MPC = 0,7 < 1
- MPC > ½ menunjukkan bahwa penggunaan tambahan pendapatan, sebagaian besar digunakan untuk menambah besarnya konsumsi, sedangkan sisanya yaitu yang jumlahnya lebih kecil merupakan tambahan saving (tabungan). Contoh : MPC = 0,7 > 0,5 dan MPS = 0,3, karena MPC + MPS = 1 atau c + s = 1

Contoh Soal 1 : Diketahui konsumsi yang dilakukan oleh masyarakat pada saat pendapatan sebesar nol (Co) adalah sebesar 900 dengan Marginal Propensity to Concume sebesar 0.7. Bentuklah sebuah fungsi konsumsi berdasarkan data – data tersebut !!

Jawab : $C = 900 + 0{,}7\,Y$

2. Fungsi Tabungan

Merupakan sebuah fungsi yang menjelaskan hubungan antara tabungan dengan pendapatan nasional. Saving merupakan bagian dari pendapatan nasional yang tidak dikonsumsi. Maka berdasarkan pengertian tersebut dapat dirumuskan sebagai berikut :

$$\boxed{\begin{aligned} S &= g(Y) \\ &= So + sY \end{aligned}}$$

Hubungan antara Fungsi Tabungan dengan Fungsi Konsumsi adalah sebagai berikut: :

$$\boxed{\begin{aligned} Y &= C + S \\ S &= Y - C \\ S &= Y - (Co + cY) \\ S &= Y - Co - cY \\ S &= -Co + (1 - c)\,Y \end{aligned}}$$

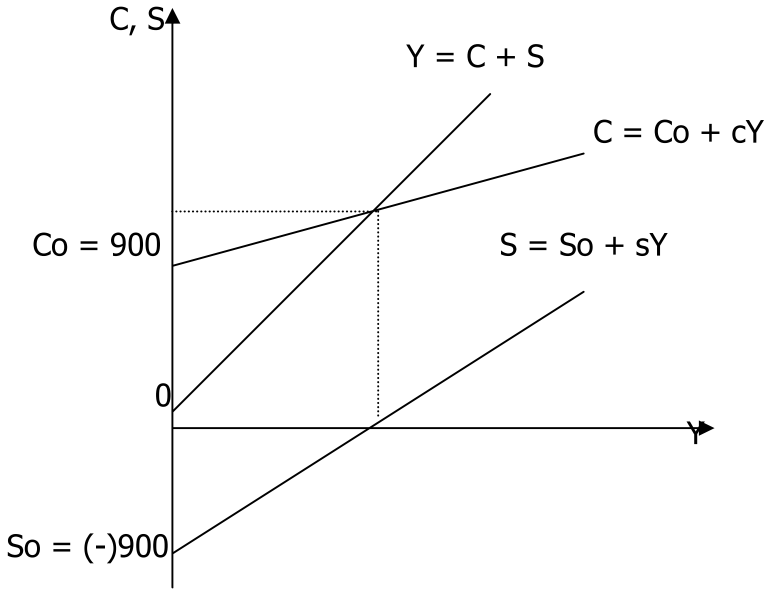
Dimana : So = Saving (tabungan) Otonom
s = MPS (Marginal Propensity to Saving) = $^{\Delta S}/_{\Delta Y}$

a. Konstanta So menunjukkan besarnya tabungan nasional pada saat Pendapatan Nasional sebesar nol (0).
b. Koefisien s (MPC) mencerminkan besarnya tambahan tabungan sebagai akibat adanya tambahan Pendapatan Nasional sejumlah tertentu.
c. ΔS menunjukkan besarnya perubahan tabungan dan ΔY menunjukkan besarnya perubahan dalam Pendapatan Nasional yang mengakibatkan besarnya tabungan termaksud.

Contoh Soal 2 : Berdasarkan contoh soal 1, bentuklah sebuah Fungsi Saving-nya !!

Jawab :

$$Y = C + S \longrightarrow \begin{aligned} S &= Y - C \\ &= Y - (900 + 0{,}7Y) \\ &= Y - 900 - 0{,}7Y \\ &= -900\,(1 - 0{,}7Y) \\ S &= -900 + 0{,}3Y \end{aligned}$$



B. Pendapatan Disposible (Yd)

Pendapatan Nasional pada dasarnya merupakan penjumlahan total dari pendapatan semua sektor di dalam suatu negara yang meliputi sektor rumah tangga, sektor badan usaha dan sektor pemerintah. Pendapatan Disposibel adalah Pendapatan Nasional yang secara nyata dapat dibelanjakan oleh masyarakat. Namun didalamnya tidak termasuk pendapatan pemerintah seperti pajak, cukai dan sebagainya. Apabila Yd menunjukkan besarnya Pendapatan Disposibel, Tx menunjukkan besarnya pajak yang dipungut oleh pemerintah dan Tr menunjukkan besarnya transfer payment pemerintah, maka secara matematis dapat ditulis sebagai berikut :

$$\boxed{Yd = Y - Tx + Tr}$$

a. Tx adalah pajak (merupakan variabel yang memperkecil Pendapatan Dispo7/2/2007sibel).
b. Tr adalah variabel yang memperbesar Pendapatan Disposibel, sebab Tr merupakan pembayaran alihan (transfer payment) yang merupakan pembayaran-pembayaran khusus dari pemerintah kepada masyarakat yang sifatnya sebagai pembayaran ekstra atau tunjangan. Misalnya berupa tunjangan pensiun, tunjangan hari raya dan bonus. Itu hanya merupakan pengalihan uang dari pemerintah kepada masyarakat, bukan merupakan imbalan langsung atas jasa masyarakat pada pemerintah dalam tahun yang berjalan.

Perhatikan :

Sesungguhnya, bukan Pendapatan Nasional (Y) yang merupakan variabel bebas dalam persamaan Fungsi Konsumsi dan Fungsi Tabungan namun Pendapatan Disposibel (Yd).

$$\boxed{\begin{aligned} C &= f(Y) \\ &= Co + cY \end{aligned}} \qquad \boxed{\begin{aligned} S &= g(Y) \\ &= So + sY \end{aligned}} \qquad \boxed{Y = C + S}$$

Dengan demikian, persamaan Fungsi Konsumsi dan Fungsi Tabungan yang sebenarnya adalah :

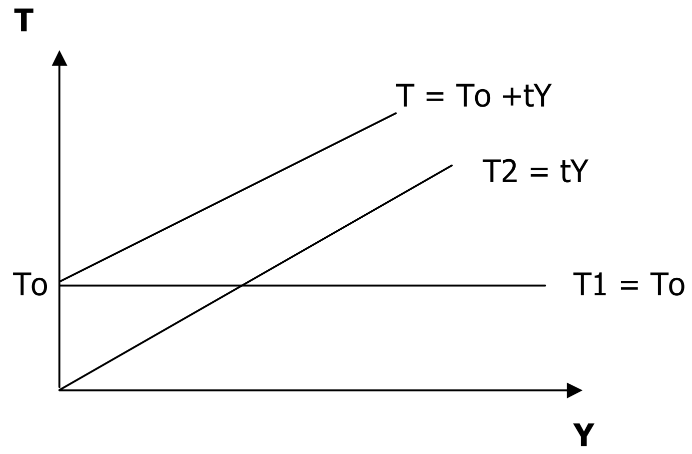
$$\boxed{\begin{aligned} C &= f(Yd) \\ &= Co + cYd \end{aligned}} \qquad \boxed{\begin{aligned} S &= g(Yd) \\ &= So + sYd \end{aligned}} \qquad \boxed{Yd = C + S}$$

C. Fungsi Pajak

Pajak yang dikenakan pemerintah pada warga negaranya ada 2 macam. Pertama ialah pajak yang jumlahnya tertentu dan tidak dikaitkan dengan pendapatan (T = To). Kedua adalah pajak yang penetapannya dikaitkan dengan tingkat pendapatan yang besarnya merupakan prosentase nilai tertentu dari pendapatan (T = tY). Secara keseluruhan besarnya pajak yang diterima oleh pemerintah adalah :

$$\boxed{T = To + tY}$$

Dimana : To = Pajak Otonom
t = Proporsi pajak terhadap pendapatan



D. Fungsi Investasi

Permintaan akan investasi merupakan fungsi dari tingkat bunga. Permintaan ini berbanding terbalik dengan tingkat bunga. Artinya meningkatkan tingkat bunga akan mengakibatkan berkurangnya investasi. Jika investasi dilambangkan dengan (I) dan tingkat bunga dilambangkan dengan (i), maka fungsi permintaan akan invesatasi dapat dituliskan sebagai berikut :

$$\boxed{\begin{aligned} I &= f(i) \\ &= Io - pi \end{aligned}}$$

Dimana : Io = Investasi Otomon, i = Tingkat bunga,p = Proporsi i terhadap Io

E. Fungsi Import

Import (M) suatu negara merupakan Fungsi Pendapatan Nasional dan cenderung berkorelasi positif. Semakin besar Pendapatan Nasional suatu negara, maka semakin besar pula nilai importnya. Hubungan import dengan Pendapatan Nasional dapat dirumuskan sebagai berikut :

$$\boxed{M = Mo + mY}$$

Dimana : Mo = Import Otonom, m = MPI (Marginal Propensity to Import) =$\Delta M/\Delta Y$

F. Fungsi Pendapatan Nasional

Pendapatan Nasional adalah jumlah nilai seluruh keluaran (barang dan jasa) yang dihasilkan oleh suatu negara dalam jangka waktu tertentu. Perhitungan Pendapatan Nasional dapat dilakukan dengan 3 macam pendekatan, yaitu pendekatan produksi, pendekatan pendapatan dan pendekatan pengeluaran. Ditinjau dari segi pendekatan pengeluaran, Pendapatan Nasional adalah jumlah pengeluaran rumah tangga, sektor badan usaha, sektor pemerintah dan sektor luar negeri.

a. Pengeluaran sektor rumah tangga dicerminkan oleh konsumsi masyarakat (C).
b. Pengeluaran sektor badan usaha dicerminkan oleh investasi (I).
c. Pengeluaran sektor pemerintah dicerminkan oleh (G).
d. Pengeluaran perdagangan dengan luar negeri dicerminkan dari selisih antara ekspor dan impor negara yang bersangkutan (X – M).

Dengan demikian, persamaan matematis Pendapatan Nasional menurut pendekatan pengeluaran (model perekonomian terbuka) adalah :

$$\boxed{Y = C + I + G + (X - M)}$$

MODUL FUNGSI NON LINIER

Fungsi non linier adalah fungsi yang grafiknya tidak berupa garis. Bentuk-bentuk fungsi non linier yang paling sering dijumpai dalam analisis ekonomi adalah :

1. Fungsi Kuadrat parabolik
2. Fungsi Kubik
3. Fungsi eksponensial
4. Fungsi Logaritmik

Dalam modul ini kita hanya akan membahas mengenai fungsi kuadrat.

FUNGSI KUADRAT

Fungsi Kuadrat adalah fungsi yang pangkat tertinggi dari variabelnya adalah dua dan grafiknya akan berbentuk parabola.

Bentuk umum : y = ax2+ bx+c

Keterangan : a,b,c merupakan konstanta,dimana a tidak sama dengan nol
X merupakan variable bebas
Y merupakan variable tidak bebas.

Untuk melukis grafiknya kita harus memperhatikan langkah-langkah berikut ini ;

1. titik potong dengan sumbu x dimana y = 0
2. titik potong dengan sumbu y dimana x = 0
3. menentukan sumbu simetri, x = -b/2a
4. menentukan titik puncak (-b/2a,b2-4ac/-4a)
5. untuk melengkapi grafik dimabil beberapa nilai x dan y secukupnya.

Fungsi kuadrat selalu memiliki nilai ekstrim maksimum atau minimum tergantung nilai a, jika : A > 0,parabola terbuka keatas dan mempunyai nilai minimum.
A < 0,parabola terbuka kebawah dan mempunyai nilai maksimum

Penerapan dalam Ekonomi

1. Permintaan,Penawaran, Keseimbangan Pasar

Cara menganalisis keseimbangan pasar untuk permintaan dan penawaran yang non-linear sama seperti halnya dalam kasus yang linear. Keseimbangan pasar ditunjukkan oleh kesamaan Qd = Qs.

Contoh :

Fungsi Permintaan suatu barang ditunjukan oleh persamaan $Qd = 30 - 5p^2$, sedangkan fungsi penawaran $Qs = 3p^2 - 20$ hitunglah harga keseimbangan pasarnya?

Keseimbangan :	Qd	=	Qs	Qd	= 3p2 - 20
	$30 - 5p^2$	=	$- 3p^2 - 20$		= 3(5)2 - 20
	$2p^2$	=	50		= 55
	p^2	=	25		
	p	=	5		

2. Fungsi Biaya

Selain pengertian biaya tetap, biaya variabel dan biaya total, dalam konsep biaya dikenal pula pengertian biaya rata-rata dan biaya marginal. Biaya rata-rata adalah biaya yang dikeluarkan untuk menghasilkan tiap unit produk atau keluaran, merupakan hasil bagi biaya total terhadap jumlah keluaran yang dihasilkan. Adapun biaya marginal ialah biaya tambahan yang dikeluarkan untuk menghasilkan satu unit tambahan produk.

Biaya Tetap (Fixed Cost)	FC	=	K (K=konstanta)
Biaya Variabel (Variabel Cost)	VC	=	F(Q)
Biaya Total (Total Cost)	TC	=	FC + VC
Biaya Marginal (Marginal Cost)	MC	=	$\Delta C / \Delta Q$
Biaya rata-rata	AC	=	TC / Q

Contoh :

Biaya Total yang dikeluarkan oleh perusahaan keramik PT. SERUMPUN $TC = 4Q3 + 16Q2 - 48Q + 80$. Hitunglah :

a. Besarnya biaya total dan biaya rata-rata pada saat Q = 7

b. Besarnya MC, apabila quantitas produksi naik dari Q = 7 menjadi Q = 16

Jawab :

a. TC $= 4Q3 + 16Q2 - 48Q + 80$, maka pada saat Q = 7

TC7 $= 4(7)3 + 16(7)2 - 48(7) + 80$

$= 1372 + 784 – 336 + 80$

$= 1900$

AC pada saat Q sebesar 7

AC $= TC/Q = 1900/7 = 271.4 \approx 271$

b. MC $= \Delta TC/\Delta Q$

TC7 $= 4(7)3 + 16(7)2 - 48(7) + 80 =1900$

TC16 $= 4(16)3 + 16(16)2 - 48(16) + 80 = 19792$

MC $= \frac{19792 - 19000}{16 - 7} = 1988$

Analisis :

- Pada saat perusahaan memproduksi sebesar 7 unit maka biaya total yang akan dikeluarkan sebesar Rp 1900 dan biaya Rata-rata sebesar Rp 271
- Apabila kuantitas produksi naik dari 7 unit menjadi 16 unit maka perusahaan memerlukan biaya tambahan sebesar Rp 19792

3. Fungsi Penerimaan

Penerimaan Total $TR = P \times Q = F(Q)$

Penerimaan rata-rata = harga per unit $AR = R/Q$ atau $P = R/Q$

Penerimaan Marginal $MR = \Delta R / \Delta Q$

Contoh :

Fungsi permintaan yang dihadapi oleh seorang produsen monopolis ditunjukan oleh $P = 900 - 1,5Q$. Bagaimanakah persamaan penerimaan totalnya. Berapakah besarnya penerimaan total harga jual per unit jika penjualan sebesar 200 unit, tentukanlah tingkat penjualan yang menghasilkan penerimaan total maksimum, dan besarnya TR maksimum tersebut. Hitunglah penerimaan marginal dari penjualan sebanyak 200 unit menjadi 250 unit ?

Penyelesaian :

P = 900 - 1,5Q   TR = P x Q = 900Q - 1,5Q2

Jika Q = 200   TR = 900 (200) - 1,5(200)2 = 120.000

P = 900 - 1,5Q = 900 – 300 = 600

P =TR/Q =120.000 / 200 = 600

Jika Q=250   TR = 900(250) - 1,5(250)2 = 131.250

MR = ΔTR/ΔQ = 131.250-120.000 / 250-200 = 225

TR maks pada Q = -b/2a = - (900)/2(-1,5) =-900/(-3) = 300

Besarnya R maks =-1,5(300)2 + 900 (300) = 135.000

Analisis : Berarti total penerimaan maksimum berada pada saat penjualan sebesar 250 unit sebesar Rp 135.000 dan dengan adanya kenaikan penjualan dari sebesar 200 unit menjadi 250 unit perusahaan memperoleh penerimaan tambahan sebesar Rp 300

4. Laba/Rugi

Contoh : Diketahui fungsi permintaan P= -4,5Q + 41 dan fungsi biaya TC=0,3Q3 – 84,5Q2-41Q+5000 apabila perusahaan memproduksi sebanyak 6 unit menjadi 70 unit perusahaan akan memperoleh laba/rugi.

Jawab :

TR = P x Q = -4,5Q2+41Q

TC = 0,3Q3-84,5Q2- 41Q+5000

Laba/Rugi = TR-TC

= (-4,5Q2 + 41) – (0,3Q3 - 84,5Q2 - 41Q + 5000)

= -0,3Q3+80Q2+82Q-5000

Q = 6   = -0,3(6)3+80(6)2+82(6)-5000 = -1692,8   (rugi)

Q = 70   = -0,3(70)3+80(70)2+82(70)-5000 = 289.840 (laba)

Analisis : Pada saat perusahaan memproduksi sebesar 6 unit perusahaan akan menderita rugi sebesar Rp 1692,8 sedangkan apabila perusahaan memproduksi sebesar 70 unit perusahaan akan mendapat laba sebesar Rp 289.840.

5. Kurva Tranformasi

Kurva tranformasi adalah kurva yang menunjukan pilihan kombinasi jumlah produksi dua macam barang dengan menggunakan masukan yang sama sejumlah tertentu karena kurva tranformasi produk mencerminkan pilihan kombinasi produksi, maka penambahan jumlah produk yang satu akan mengurangi jumlah produk lain.

Contoh 1 : Sebuah produk yang menggunakan bahan baku kulit menghasilkan sepatu dan tas. Kurva tranformasi produk ditunjukan oleh persamaan 4R2+6,25T2 = 40.000. Berapa pasang sepatu dan buah tas paling banyak dapat diproduksi dan berapa sepatu dapat diproduksi jika pabrik memproduksi 60 buah tas ?

Jawab :

Jumlah sepatu terbanyak T=0;	4R2+6,25(0)2 = 40.000	
	R2	= 10.000
	R	= 100 pasang
Jumlah tas terbanyak R=0;	4(0)2+6,25T2 = 40.000	
	T2	= 6.400
	T	= 80 buah
Jika T=60;	4R2	= 40.000 - 6,25(60)2
	4R2	= 17.500
	R2	= 4.375
	R	= 66,14 = 66 pasang

Contoh 2:

Kurva Transformasi PT. TIBELIT (X - 18) (Y - 19) = 75, dengan syarat X < 20 dan X positif. Maka tentukanlah berapa jumlah produk X dan Y yang dapat diproduksi apabila :

a. Hitung berapa produk X dan Y maksimum dapat diproduksi PT. TIBELIT !

b. Permintaan X 4 kali permintaan Y, analisislah !

c. Permintaan X melebihi produk Y sebesar 12 unit. Analisalah!

Jawab :

a. $(X - 18)(Y - 19) = 75$

X terbesar jika Y = 0	Y terbesar jika X = 0
$(X - 18)(0 - 19) = 75$	$(0 - 18)(Y - 19) = 75$
$-19X + 342 = 75$	$-18Y + 342 = 75$
$19X = 267$	$18Y = 267$
$X = 14$	$Y = 15$

Analisis : PT "TIBELIT" dapat memproduksi produk X paling banyak 14 dan produk Y paling banyak 15.

b. $X = 4Y$

$(X - 18)(Y - 19) = 75$	$Y_{1,2} = - b \pm \sqrt{b^2 - 4ac} / (2a)$
$(4Y - 18)(Y - 19) = 75$	$Y_{1,2} = -(-94) \pm \sqrt{(-94)^2 - 4(4)(267)} / (2.4)$
$4Y^2 - 94Y + 342 = 75$	$Y_1 = 20$ $\quad$ $Y_2 = 3$
$4Y^2 - 94Y + 267 = 0$	$X_1 = 4 \times 20 = 80$ $\quad$ $X_2 = 4 \times 3 = 12$

Analisis : Jadi apabila permintaan produk X 4 kali lipat produk Y dan berdasarkan syarat $X < 20$ dan X positif maka PT "TIBELIT" dapat memproduksi X sebanyak 12 dan produk Y sebanyak 3 unit.

c. $X = 12 + Y$

$(X - 18)(Y - 19) = 75$	$Y_{1,2} = - b \pm \sqrt{b^2 - 4ac} / (2a)$
$(Y - 6)(Y - 19) = 75$	$Y_{1,2} = -(-25) \pm \sqrt{(-25)^2 - 4(1)(39)} / (2 . 1)$
$Y^2 - 25Y + 114 = 75$	$Y_1 = 23$ $\quad$ $Y_2 = 2$
$Y^2 - 25Y + 39 = 0$	$X_1 = 12 + 23 = 35$ $\quad$ $X_2 = 12 + 2 = 14$

Analisis : Apabila permintaan produk X melebihi produk Y sebanyak 12 produk dan berdasarkan syarat $X < 20$ dan X positif maka PT "TIBELIT" dapat memproduksi produk X sebanyak 14 unit dan produk Y sebanyak 2 unit.

MODUL MATRIKS

I. MATRIKS BAGIAN 1 (MATRIKS MATEMATIK)

A. Pengertian dan Notasi Matriks

Matriks adalah kumpulan bilangan yang disajikan secara teratur dalam baris dan kolom yang membentuk persegi panjang; seta termuat diantara sepasang tanda kurung biasa atau kurung siku.

Secara umum suatu matriks dituliskan sebagai :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots\ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots\ldots a_{2n} \\ a_{m1} & a_{m2} \ldots\ldots a_{mn} \end{bmatrix}$$

a_{11} = Unsur matriks A baris ke-1 kolom ke1

a_{21} = Unsur matriks A baris ke-2 kolom ke 1, dst

Bilangan-bilangan atau huruf-huruf yang ada dalam suatu matriks ***elemen-elemen matriks*** atau ***unsur-unsur matriks.*** Unsur-unsur matriks yang berjajar horizontal dinamakan baris (i) sedangkan unsur-unsur matriks berjajar vertikal dinamakan kolom (j).

Setiap matriks terdiri atas satu / sejumlah baris (m) dan satu atau sejumlah kolom (n).

Contoh 1 :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 6 \\ 8 & 7 & 9 \end{bmatrix}$$

Elemen 1,3,2 terletak pada baris ke-1

Elemen 1,4,8 terletak pada kolom ke-1

a_{12} (elemen A pada baris 1 kolom 2) = 3

a_{23} (elemen A pada baris 2 kolom 3) = 6

B. Ordo Matriks

Ordo matriks/ukuran/dimensi dari matriks ditentukan dengan banyaknya baris (m) diikuti dengan banyaknya kolom (n). Bila matriks A mempunyai m baris dan n kolom, maka ordo matriks tersebut adalah : m **.** n, umumnya ditulis $a_{m.n}$

Contoh 2 : Pada contoh 1, ordo matriksnya adalah 3x3 (terdiri dari 3 baris dan 3 kolom).

Catatan : Ukuran matriks harus selalu mengikuti urutan baris, kemudian kolom.

C. Jenis-jenis Matriks

1. Matriks Baris

Matriks baris adalah matriks yang susunan unsur-unsurnya hanya terdiri atas satu baris.

Contoh :

$A_{1x3} = (3 \quad 6 \quad 5)$

$A_{1x2} = (4 \quad 7)$

2. Matriks Kolom

Matriks kolom adalah matriks yang susunan unsur-unsurnya hanya terdiri dari stu kolom.

Contoh :

$$B_{1x3} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix} \qquad B_{2x1} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix}$$

3. Matriks Bujur Sangkar

Matriks bujur sangkar adalah matriks yang susunan unsurnya mempunyai baris dan kolom yang sama banyaknya.

Contoh :

$$C_{3x3} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 5 & 4 \\ 9 & 7 & 8 \end{bmatrix} \qquad C_{2X2} = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

Selain jenis-jenis matriks yang disebutkan tersebut, matriks juga banyak mempunyai bentuk-bentuk khusus lainnya (biasa dilihat pada buku-buku Matematika lainnya).

D. Operasi Matriks

a. Penjumlahan dan Pengurangan matriks

Dua buah matriks hanya dapat dijumlahkan / dikurangkan apabila keduanya ber ordo sama. Jumlah atau selisih 2 matriks A = (a_{ij}) dan B = (b_{ij}) adalah sebuah matriks baru C = (c_{ij}) yang ber ordo sama, yang unsur-unsurnya merupakan jumlah atau selisih unsur-unsur A dan B.

<u>Contoh 4.1 :</u>

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 3 \\ 5 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Maka A + B =

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 3 \\ 5 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 8 \\ 6 & 8 & 9 \\ 12 & 10 & 10 \end{bmatrix}$$

A - B =

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 3 \\ 5 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 2 & 6\,a & 8 \end{bmatrix}$$

b. Perkalian Matriks

1. Perkalian matriks dengan bilangan riil (skalar)

Bila suatu bilangan riil k dikalikan dengan suatu matriks A_{mxn} maka hasilnya adalah matriks B_{mxn} yang semua unsur-unsurnya dari A_{mxn} dikalikan dengan k.

<u>Contoh 4.2 :</u>

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \longrightarrow 3A = 3 \times \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -6 \\ 9 & -12 \end{bmatrix}$$

Bila A dan B matriks ber ordo m x n dan r, s bilangan riil, maka berlaku sifat :

- (r+s)A = rA+sA
- r(A+B) = rA+rB
- r(sA) = (rs)A
- 1A = A
- (-1)A = -A

2. Perkalian dua matriks

Matriks A dan B bias dikalikan jika banyaknya *kolom* matriks A sama dengan banyaknya *baris* matriks B.

Matriks A_{mxn} dikalikan dengan B_{nxp}, menghasilkan matriks baru ber ordo mxp.

Contoh 4.3 :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 5 & 7 & 6 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 2 \\ 9 & 4 \end{bmatrix}$$

Maka A x B :

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 5 & 7 & 6 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 2 \\ 9 & 4 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 2.2+4.6+3.9 & 2.1+4.2+3.4 \\ 5.2+7.6+6.9 & 5.1+7.2+6.4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 54 & 22 \\ 106 & 71 \end{bmatrix}$$

Misalkan A, B dan C adalah matriks–matriks yang dapat dikalikan maka :

- Sifat Distributif

  A(B+C) = AB+AC
- Sifat Asosiatif

  A(BC) = (AB)C
- AB $\neq$ BA
- AB = 0, tidak berlaku A = 0 atau B = 0
- AB = AC, tidak berlaku B = C

E. Transpose Matriks (A’)

Dari suatu matriks A dapat dibentuk menjadi matriks baru (ubahan) dengan cara :

- Elemen baris diubah menjadi elemen kolom
- Elemen kolom diubah menjadi elemen baris.

<u>Contoh 5 :</u>

$$A = (5 \;\; 4 \;\; 6) \qquad \text{maka } A' = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$B = \;\; 3 \;\; 1 \;\; 2 \qquad \text{maka } B' = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 4 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$$

F. Determinan

Determinan adalah penulisan unsur-unsur sebuah matriks bujur sangkar dalam bentuk determinan, yaitu diantara sepasang garis tegak atau “ ”.

Determinan mempunyai nilai numeric yang bias dicari dengan cara mengalikan unsur-unsurnya secara diagonal.

a. Determinan matriks ordo dua :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \;—\; |A| = a_{11}\,a_{22} - a_{21}\,a_{12}$$

<u>Contoh 6.1 :</u>

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 8 \end{bmatrix} \;—\; |A| = 1.8 - 3.5$$
$$= 8 - 15$$
$$= -5$$

b. Determinan matriks ordo tiga :

❖ Metode Sarrus :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad — \quad \left| A \right| = \left| \begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array} \right.$$

$$\left| A \right| = (1+2+3) - (4+5+6)$$

Contoh 6.2 :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} \begin{array}{l} = 1.5.9+2.6.7+3.8.4 - 7.5.3 - 4.2.9 - 1.6.9 \\ = 45 + 84 + 96 - 105 - 72 - 48 \\ = 0 \end{array}$$

❖ Metode Laplace :

Kelebihan metode ini dibandingkan dengan metode sebelumnya adalah metode ini dapat digunakan untuk mencari determinan berdimensi berapapun, yakni dengan menggunakan minor dan kofaktor dari determinan matriks yang bersangkutan.

M_{11} = Minor dari unsur a_{11}, diperoleh dengan menutup baris ke-1 dan kolom ke-1 dari determinan $\left| A \right|$.

M_{12} = Minor dari unsur a_{12}, diperoleh dengan menutup baris ke-1 dan kolom ke-2 dari determinan $\left| A \right|$.

Penyelesaian determinan dengan notasi minor :

$$\left| A \right| = a_{11} M_{11} - a_{12} M_{12} + a_{13} M_{13}$$
$$= \sum a_{ij} M_{ij}$$

Contoh 6.3 :

Dengan menggunakan determinan matriks A pada contoh 6.2 maka minornya adalah :

$$M11 = \begin{array}{cc} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{array} = 5.9 - 6.8 = -3$$

$$M12 = \begin{array}{cc} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{array} = 4.9 - 7.6 = -6$$

$M13 = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 4.8 - 5.7 = -3$

Det $|A| = 1(-3) - 2(-6) + 3(-3) = 0$

Penulisan determinan dalam bentuk minor dapat diubah kedalam bentuk kofaktor :

$$\boxed{A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}}$$

Keterangan :

M_{ij} = Minor a_{ij}

A_{ij} = Kofaktor dari unsur a

Penyelesaian determinan dengan notasi kofaktor :

$|A| = a_{11}A_{11} - a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$

Atau : $\sum a_{ij}A_{ij}$ untuk setiap baris I = 1,2 ……n, $\sum a_{ij}A_{ij}$ untuk setiap kolom j = 1,2 …… m

<u>Contoh 6.4 :</u>

Dari contoh 6.3, maka kofaktornya adalah :

$A_{11} = (-1)^2(-3) = -3$

$A_{12} = (-1)^3(-6) = 6$

$A_{13} = (-1)^4(-3) = -3$

Jadi $|A| = 1(-3) + 2(6) + 3(-3)$

$= -3 + 12 - 9$

$= 0$

G. Adjoint

Adjoint adalah ubahan darimatriks kofaktor-kofaktornya yang hasilnya berupa matriks juga.

$$\boxed{\text{Adj } A = [A_{ij}]^1}$$

Langkah-langkah untuk mencari adjoint :

1. Cari minor semua unsur matriks
2. Ubah minor tersebut ke dalam kofaktor
3. Kofaktor tersebut diubah (transpose), maka akan dapat adjoint

Contoh 7.1 :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \quad ; \text{Adjoint } A = \ldots?$$

Langkah 1:

$M_{11} = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} = -3$ $\quad M_{12} = \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} = -6$ $\quad M_{13} = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = -3$

$M_{21} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} = -6$ $\quad M_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} = -12$ $\quad M_{23} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} = -12$

$M_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = -3$ $\quad M_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = -6$ $\quad M_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -3$

Langkah 2:

A11 = (-1)2(-3) = -3 A12 = (-1)3(-6) = 6 A13 = (-1)4(-3) = -3

A21 = (-1)3(-6) = 6 A22 = (-1)3(-12) = 12 A23 = (-1)3(-6) = 6

A31 = (-1)4(-3) = -3 A32 = (-1)5(-6) = 6 A33 = (-1)6(-3) = -3

$$|Aij| = \begin{bmatrix} -3 & 6 & -3 \\ 6 & 12 & 6 \\ -3 & 6 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\text{Adjoint } A = [A]' = \begin{bmatrix} -3 & 6 & -3 \\ 6 & 12 & 6 \\ -3 & 6 & -3 \end{bmatrix}$$

Dalam contoh ini secara kebetulan matrix kofaktor [Aij] sama dengan ubahannya

H. Invers Matriks (Membalik)

Membalik suatu matriks berarti mencari suatu matriks bahkan yang apabila dikalikan dengan matriks aslinya akan menghasilkan matriks satuan.

AB = I

a. invers matriks berordo dua:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \qquad A^{-1} = \frac{1}{\text{Det } A} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

b. invers matriks berordo lebih tinggi

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}}{|A|}$$

<u>II. MATRIKS BAGIAN 2 (PENERAPAN EKONOMI)</u>

I. Penerapan Matriks di Bidang Ekonomi

Salah satu penerapan aljabar matriks dalam bidang ekonomi adalah analisis masukan-keluaran (input-output analysis). Langkah awal dalam analisis masukan-keluaran adalah menyusun suatu table yang berisi keterangan-keterangan tentang bagaimana keluaran suatu sector terdistribusi ke sektor-sektor lain sebagai masukan dan ke pemakai akhir sebagai barang konsumsi . table ini disebut <u>matriks transakasi</u>

Berdasarkan matriks transaksi tersebut maka diperoleh hubungan masukan-keluaran antarsektor. Jika nilai setiap unsur dibagi dengan nilai jumlah baris atau nilai jumlah kolom yang bersesuaian maka diperoleh suatu rasio yang dinamakan <u>koefisien teknologi</u>. Diperlukan sebagai masukan untuk masukan untuk menghasilkan satu ubnit keluaran di sector j.

Koefisien teknologi: $a = \frac{X_{ij}}{X}$

Rumus untuk menghitung permintaan total: $\boxed{U_{m \times 1} = (I - A)_{m \times m} X_{m \times 1}}$

Jika matriks I – A nonsingular, yakni jika |I – A| ≠ 0, maka matriks tersebut mempunyai balikan. Dalam hal ini untuk U = (I-A)X dapat ditulis menjadi:

$$\boxed{U_{m\,x\,1} = (I - A)^{-1}{}_{mx\,m}\, X_{m\,x\,1}}$$

Contoh 9.1

Diketahui matriks transaksi perekonomian Negara 'Selalu Makmur' adalah sebagai berikut :

Keluaran / Masukan	Pertanian	Industri	Jasa	Permintaan Terakhir	Keluaran
Pertanian	20	35	5	40	100
Industri	15	80	60	135	290
Jasa	10	50	55	120	235
Nilai Tambah	55	125	115	70	365
Keluaran total	100	290	235	365	990

Tentukan keluaran total untuk pertanian, industri dan jasa, jika permintaan akhir untuk masing-masing sektor adalah 100, 300 dan 200 !

Berdasarkan rumus koefisien di atas diperoleh matriks teknologi :

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} P & I & J \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{Pertanian} \\ \text{Industri} \\ \text{Jasa} \end{array} & \begin{bmatrix} 0{,}20 & 0{,}12 & 0{,}02 \\ 0{,}15 & 0{,}28 & 0{,}26 \\ 0{,}10 & 0{,}17 & 0.23 \end{bmatrix} = A \end{array}$$

Rumus : X = $(I - A)^{-1}\,U$

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-0{,}2 & -0{,}12 & -0{,}02 \\ -0{,}15 & 1-0{,}28 & -0{,}26 \\ -0{,}10 & -0{,}17 & 1-0{,}23 \end{bmatrix}^{-1} * \begin{bmatrix} 100 \\ 300 \\ 200 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0{,}80 & -0{,}12 & -0{,}02 \\ -0{,}15 & 0{,}72 & -0{,}26 \\ -0{,}10 & -0{,}17 & 0{,}77 \end{bmatrix}^{-1} * \begin{bmatrix} 100 \\ 300 \\ 200 \end{bmatrix}$$

Determinan | I – A | = 0,38923

$$\left(\mathrm{I - A}\right) = \frac{\mathrm{adj\,(I - A)}}{|\,\mathrm{I - A}\,|}$$

$$\begin{bmatrix} 0{,}80 & -0{,}12 & -0{,}02 \\ -0{,}15 & 0{,}72 & -0{,}26 \\ -0{,}10 & -0{,}17 & 0{,}77 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0{,}5102 & 0{,}0958 & 0{,}0456 \\ 0{,}1415 & 0{,}6140 & 0{,}2110 \\ 0{,}0975 & 0{,}1480 & 0{,}5580 \end{bmatrix} : 0{,}38923$$

$$= \begin{bmatrix} 1{,}3108 & 0{,}2461 & 0{,}1171 \\ 0{,}3635 & 1{,}5775 & 0{,}5421 \\ 0{,}2505 & 0{,}3802 & 1{,}4336 \end{bmatrix}$$

Dengan demikian :

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1{,}3108 & 0{,}2461 & 0{,}1171 \\ 0{,}3635 & 1{,}5775 & 0{,}5421 \\ 0{,}2505 & 0{,}3802 & 1{,}4336 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 100 \\ 300 \\ 200 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 228{,}33 \\ 618{,}02 \\ 425{,}83 \end{bmatrix}$$

Jadi keluaran total masing-masing sektor akan menjadi :

Pertanian = 228,33
Industri = 618,02
Jasa = 425,83